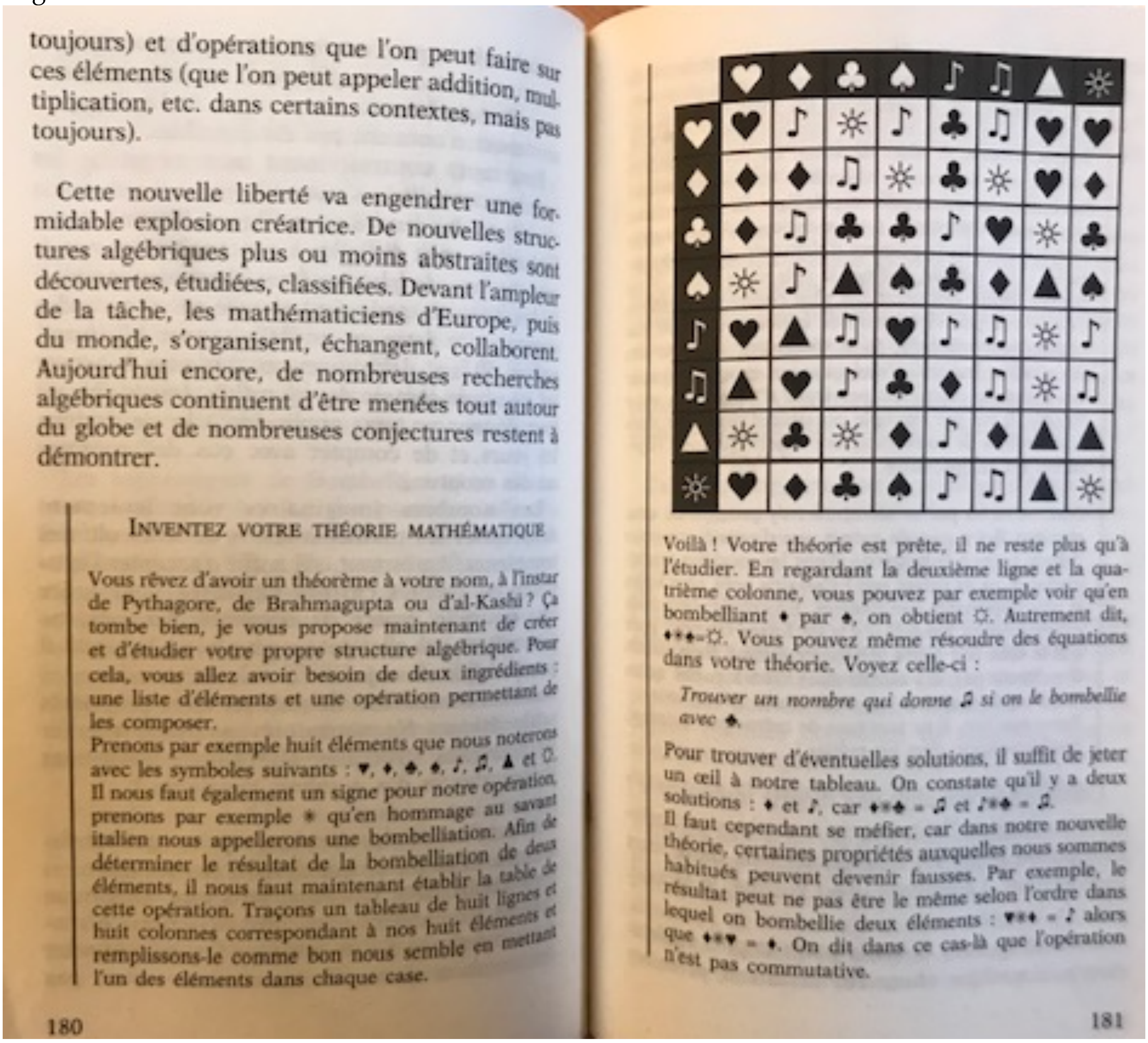
Extrait du "Grand roman des maths", de Mickaël Delaunay

En racontant l'histoire de Rafael Bombelli, avec l'idée que les nombres négatifs pouvaient avoir aussi avoir une racine, ouvrit tout un pan des mathématiques : les nombres imaginaires, qui ont ouvert à leur tour toutes sortes d'applications physiques. Mickaël Delaunay va plus loin : "Ne serait-il pas possible de rajouter à volonté de nouveaux nombres, à condition de préciser leurs propriétés arithmétiques. Ne pourrait-on pas même inventer de nouvelles structures algébriques totalement indépendantes des nombres classiques"

Page 180 :



toujours) et d'opérations que l'on peut faire sur ces éléments (que l'on peut appeler addition, multiplication, etc. dans certains contextes, mais pas toujours).

Cette nouvelle liberté va engendrer une formidable explosion créatrice. De nouvelles structures algébriques plus ou moins abstraites sont découvertes, étudiées, classifiées. Devant l'ampleur de la tâche, les mathématiciens d'Europe, puis du monde, s'organisent, échangent, collaborent. Aujourd'hui encore, de nombreuses recherches algébriques continuent d'être menées tout autour du globe et de nombreuses conjectures restent à démontrer.

Inventez votre théorie mathématique

Vous rêvez d'avoir un théorème à votre nom, à l'instar de Pythagore, de Brahmagupta ou d'al-Kashi ? Ça tombe bien, je vous propose maintenant de créer et d'étudier votre propre structure algébrique. Pour cela, vous allez avoir besoin de deux ingrédients : une liste d'éléments et une opération permettant de les composer.

Prenons par exemple huit éléments que nous noterons avec les symboles suivants : ♥, ♦, ♣, ♠, ♪, ♫, ▲ et ☼. Il nous faut également un signe pour notre opération, prenons par exemple ∗ qu'en hommage au savant italien nous appellerons une bombelliation. Afin de déterminer le résultat de la bombelliation de deux éléments, il nous faut maintenant établir la table de cette opération. Traçons un tableau de huit lignes et huit colonnes correspondant à nos huit éléments et remplissons-le comme bon nous semble en mettant l'un des éléments dans chaque case.

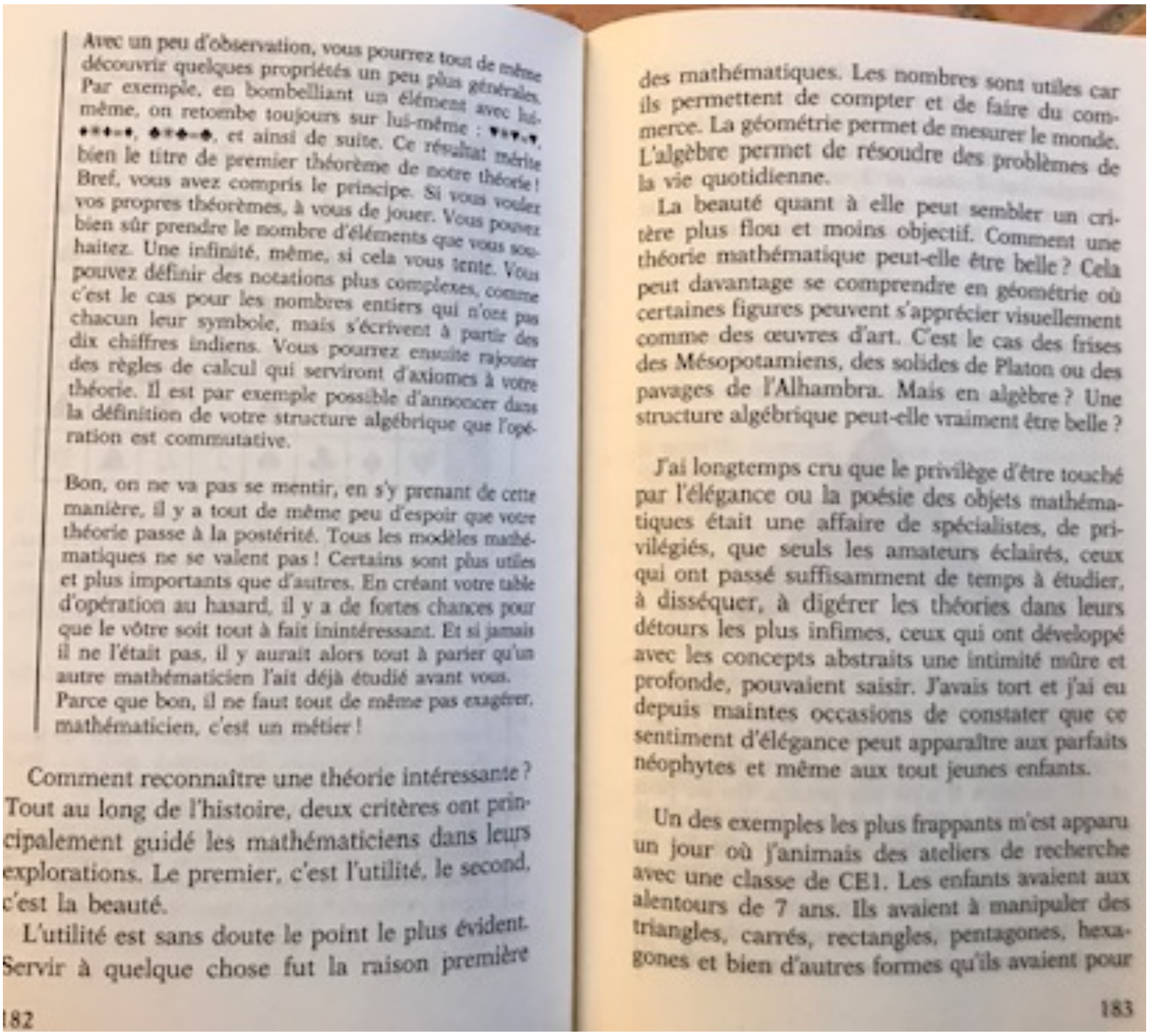
	♥	♦	♣	♠	♪	♫	▲	☼
♥	♥	♪	☼	♪	♣	♫	♥	♥
♦	♦	♦	♫	☼	♣	☼	♥	♦
♣	♦	♫	♣	♣	♪	♥	☼	♣
♠	☼	♪	▲	♠	♣	♦	▲	♠
♪	♥	▲	♫	♥	♪	♫	☼	♪
♫	▲	♥	♪	♣	♦	♫	☼	♫
▲	☼	♣	☼	♦	♪	♦	▲	▲
☼	♥	♦	♣	♠	♪	♫	▲	☼

Voilà ! Votre théorie est prête, il ne reste plus qu'à l'étudier. En regardant la deuxième ligne et la quatrième colonne, vous pouvez par exemple voir qu'en bombelliant ♦ par ♠, on obtient ☼. Autrement dit, ♦∗♠=☼. Vous pouvez même résoudre des équations dans votre théorie. Voyez celle-ci :

Trouver un nombre qui donne ♫ si on le bombellie avec ♣.

Pour trouver d'éventuelles solutions, il suffit de jeter un œil à notre tableau. On constate qu'il y a deux solutions : ♦ et ♪, car ♦∗♣ = ♫ et ♪∗♣ = ♫.

Il faut cependant se méfier, car dans notre nouvelle théorie, certaines propriétés auxquelles nous sommes habitués peuvent devenir fausses. Par exemple, le résultat peut ne pas être le même selon l'ordre dans lequel on bombellie deux éléments : ♥∗♦ = ♪ alors que ♦∗♥ = ♦. On dit dans ce cas-là que l'opération n'est pas commutative.



Avec un peu d'observation, vous pourrez tout de même découvrir quelques propriétés un peu plus générales. Par exemple, en bombelliant un élément avec lui-même, on retombe toujours sur lui-même : ♦*♦=♦, ♣*♣=♣, et ainsi de suite. Ce résultat mérite bien le titre de premier théorème de notre théorie ! Bref, vous avez compris le principe. Si vous voulez vos propres théorèmes, à vous de jouer. Vous pouvez bien sûr prendre le nombre d'éléments que vous souhaitez. Une infinité, même, si cela vous tente. Vous pouvez définir des notations plus complexes, comme c'est le cas pour les nombres entiers qui n'ont pas chacun leur symbole, mais s'écrivent à partir des dix chiffres indiens. Vous pourrez ensuite rajouter des règles de calcul qui serviront d'axiomes à votre théorie. Il est par exemple possible d'annoncer dans la définition de votre structure algébrique que l'opération est commutative.

Bon, on ne va pas se mentir, en s'y prenant de cette manière, il y a tout de même peu d'espoir que votre théorie passe à la postérité. Tous les modèles mathématiques ne se valent pas ! Certains sont plus utiles et plus importants que d'autres. En créant votre table d'opération au hasard, il y a de fortes chances pour que le vôtre soit tout à fait inintéressant. Et si jamais il ne l'était pas, il y aurait alors tout à parier qu'un autre mathématicien l'ait déjà étudié avant vous. Parce que bon, il ne faut tout de même pas exagérer, mathématicien, c'est un métier !

Comment reconnaître une théorie intéressante ? Tout au long de l'histoire, deux critères ont principalement guidé les mathématiciens dans leurs explorations. Le premier, c'est l'utilité, le second, c'est la beauté.

L'utilité est sans doute le point le plus évident. Servir à quelque chose fut la raison première

182

des mathématiques. Les nombres sont utiles car ils permettent de compter et de faire du commerce. La géométrie permet de mesurer le monde. L'algèbre permet de résoudre des problèmes de la vie quotidienne.

La beauté quant à elle peut sembler un critère plus flou et moins objectif. Comment une théorie mathématique peut-elle être belle ? Cela peut davantage se comprendre en géométrie où certaines figures peuvent s'apprécier visuellement comme des œuvres d'art. C'est le cas des frises des Mésopotamiens, des solides de Platon ou des pavages de l'Alhambra. Mais en algèbre ? Une structure algébrique peut-elle vraiment être belle ?

J'ai longtemps cru que le privilège d'être touché par l'élégance ou la poésie des objets mathématiques était une affaire de spécialistes, de privilégiés, que seuls les amateurs éclairés, ceux qui ont passé suffisamment de temps à étudier, à disséquer, à digérer les théories dans leurs détours les plus infimes, ceux qui ont développé avec les concepts abstraits une intimité mûre et profonde, pouvaient saisir. J'avais tort et j'ai eu depuis maintes occasions de constater que ce sentiment d'élégance peut apparaître aux parfaits néophytes et même aux tout jeunes enfants.

Un des exemples les plus frappants m'est apparu un jour où j'animais des ateliers de recherche avec une classe de CE1. Les enfants avaient aux alentours de 7 ans. Ils avaient à manipuler des triangles, carrés, rectangles, pentagones, hexagones et bien d'autres formes qu'ils avaient pour

183

Je salue cette sortie de la caverne de Platon !